Геометрия, 8 "В", 27 февраля, домашнее задание.

1) Продолжения сторон AB и CD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке P (D между C и P), продолжения сторон AD и BC — в точке Q (D между Q и A). Докажите, что описанные окружности треугольников PBC, ABQ, ADP и DQC пересекаются в одной точке (точка Мигеля четырёх прямых AB, BC, CD и DA).

2) (Продолжение.) Докажите, что точка Мигеля будет лежать на PQ тогда и только тогда, когда $ABCD$ вписан.

3) Во вписанном шестиугольнике две пары противоположных сторон параллельны. Докажите, что и третья пара тоже параллельна.

4) Дан треугольник с не слишком тупыми углами (все углы меньше $120°$). На его сторонах вовне построены равносторонние треугольники. Докажите, что их описанные окружности пересекаются в одной точке, лежащей внутри треугольника. Эта точка называется точкой Торичелли данного треугольника. Под какими углами видны стороны треугольника из точки Торичелли?

5) Докажите, что среди всех точек внутри не слишком тупоугольного треугольника ABC точка T Торичелли обладает минимально возможной суммой $TA + TB + TC$. (Указание: постройте на стороне AB равносторонний треугольник ABC_1 как в предыдущей задаче. Теперь для любой точки S внутри ABC рассмотрите точку S_1 внутри ABC_1 такую, что $C_1S_1 = CS$ и $AS_1 = AS$.)

6) Пусть O_1, O_2 и O_3 суть центры вневписанных окружностей треугольника ABC. Докажите, что описанная окружность треугольника ABC является окружностью Эйлера для треугольника $O_1O_2O_3$.

7) Окружность касается сторон угла APB в точках A и B. Пусть AC — диаметр окружности, O — её центр, K — середина хорды AB, прямая PC вторично персекает окружность в точке D. Докажите, что точки A, K, D и P коцикличны.

8) (Продолжение.) Докажите, что точки C, O, K и D коцикличны.