46. Радикальная ось (14.05.2008)

1. Докажите, что степень точки E относительно окружности $s(O,R)$ равна $d^2 - R^2$, где d — расстояние между точками O и E.

Радикальной осью двух данных окружностей называется ГМТ, степени которых относительно этих окружностей равны.

2. Точка M принадлежит данному ГМТ $\iff d_1^2 - d_2^2 = R_1^2 - R_2^2$.

3. Докажите, что если найдется хотя бы одна точка M, принадлежащая данному ГМТ, то все точки прямой, проходящей через M перпендикулярно линии центров, а) так же принадлежат данному ГМТ; б) никакие другие точки этим свойством не обладают.

ГМТ точек, степени которых относительно данных двух окружностей равны, если оно не пусто, есть прямая, перпендикулярная линии центров. Чтобы ее построить, достаточно найти хотя бы одну точку, удовлетворяющую требуемому свойству.

4. Постройте радикальную ось двух касающихся окружностей.

5. Постройте радикальную ось двух пересекающихся окружностей.

6. Окружности расположены одна вне другой. Постройте точку пересечения их общей касательной и радикальной оси.

7. Даны два отрезка. Постройте два новых отрезка, не равных данным, так, чтобы разность квадратов их длин была той же.

8. Окружности расположены одна внутри другой. Постройте их радикальную ось.

9. На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности. Через точки пересечения любых двух из них проведена прямая. Докажите, что если они не параллельны, то пересекаются в одной точке — *радикальном центре окружностей.*

10. Дан произвольный треугольник ABC. A_1, B_1, C_1 — произвольные точки на сторонах BC, AC, AB соответственно. Докажите, что радикальный центр окружностей, построенных на AA_1, BB_1, CC_1 как на диаметрах, совпадает с ортоцентром $\triangle ABC$.

Углом между двумя окружностями называется угол между касательными, проведенными к ним в их общей точке.

11. Угол между окружностями равен углу между радиусами, проведенными в точку пересечения.

12. Докажите, что радикальная ось — ГМТ центров окружностей, пересекающих обе окружности под прямым углом.