

43. Две окружности (15.04.2008)

1. Докажите, что точка касания двух окружностей лежит на их линии центров.
2. Докажите, что общая касательная двух окружностей перпендикулярна линии центров.
3. Окружности радиусов R и r внешне касаются в точке A . Общая касательная касается их в точках B и C соответственно. Найдите BC , BA и CA .
4. К двум касающимся окружностям проведена общая внешняя касательная. Докажите, что отрезок касательной виден из точки касания окружностей под прямым углом.
5. Окружности расположены одна вне другой. К ним провели общую внешнюю касательную AB и общую внутреннюю CD (A и C лежат на одной окружности). Докажите, что $AC \perp BD$.
6. Две окружности с центрами O_1 и O_2 внешне касаются в точке A . На одной из них (той, что с центром O_1) взята точка B . Прямая BA пересекает другую окружность в точках A и C . Докажите, что $O_1B \parallel O_2C$.
7. Две окружности, ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B . Через A проходит прямая l_1 , пересекающая ω_1 в P_1 , ω_2 в P_2 . Через B проходит прямая l_2 , пересекающая ω_1 в Q_1 , ω_2 в Q_2 . Докажите, что $P_1Q_1 \parallel P_2Q_2$.
8. Докажите, что общая хорда двух пересекающихся окружностей перпендикулярна их линии центров.
9. Докажите, что две окружности не могут пересекаться более чем в двух точках.
10. К двум касающимся окружностям проведены общие касательные — внешняя и внутренняя. Докажите, что внутренняя касательная делит отрезок внешней касательной пополам.
11. Две окружности пересекаются в точках M и N . Общая касательная касается их в точках B и C . Докажите, что прямая MN делит отрезок BC пополам.
12. Окружности радиусов R и r внешне касаются в точке K . Общие касательные касаются одной из них в точках A и D , а другой — в точках B и C (A и B лежат на одной касательной). Докажите, что $ABCD$ — вписанная трапеция. Докажите, что $ABCD$ — описанная трапеция. Где лежит центр вписанной в неё окружности? Найдите радиус окружности, вписанной в $ABCD$.
13. Три окружности попарно касаются внешне (каждая — каждой). Пусть A , B и C — точки касания. Докажите, что прямые AB и AC вторично пересекают окружность, не содержащую точки A в диаметрально противоположных точках.