Несколько важных неравенств

1. Разбор домашнего задания

Указание к задаче 1: по неравенству треугольника сумма длин диагоналей больше суммы длин оснований.

2. Модуль числа

Вспомним определение и геометрический смысл модуля числа. Верно ли, что для любых $a, b \in \mathbb{R}$

а) $|a| \cdot |b| = |ab|$; б) $\dfrac{|a|}{|b|} = \left|\dfrac{a}{b}\right|$?

Что можно сказать про выражения $|a+b|$ и $|a|+|b|$, выражения $|a-b|$ и $|a|-|b|$?

Докажем, что при $a, b \in \mathbb{R}$

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|.$$

Если выражения a и b одного знака, или, если одно из выражений a или b равно нулю, то $|a+b| = |a|+|b|$. Рассмотрим случай, когда они разных знаков. Пусть, для определённости, $a<0$, $b>0$. Тогда рассмотрим разность $D = |a+b| - (|a|+|b|) = |a+b| + a - b$. Если $|a| < |b|$, то $D = a+b+a-b = 2a < 0$, а если $|b| < |a|$, то $D = -a-b+a-b = -2b < 0$, то есть, левая часть меньше правой. Таким образом, мы доказали исходное неравенство для любых действительных a и b.

Нетрудно показать, что для любых действительных a и b $|a-b| \geqslant |a|-|b|$. Но мы докажем более сильный факт:

$$|a-b| \geqslant \Big||a|-|b|\Big|.$$

Действительно,

$$\left.\begin{array}{l} |a| = |a-b+b| \leqslant |a-b|+|b| \quad\Rightarrow\quad |a|-|b| \leqslant |a-b| \\ |b| = |b-a+a| \leqslant |b-a|+|a| \quad\Rightarrow\quad |b|-|a| \leqslant |a-b| \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \Big||a|-|b|\Big| \leqslant |a-b|.$$

3. Свойство взаимно обратных чисел

Сумма взаимно обратных положительных чисел не меньше двух (докажите самостоятельно). Это неравенство можно записать двумя способами:

$$a + \frac{1}{a} \geqslant 2 \qquad \text{или} \qquad \frac{a}{b} + \frac{b}{a} >\geqslant 2.$$

4. Неравенства о средних

$$\underbrace{\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}}_{\text{среднее гармоническое}} \leqslant \underbrace{\sqrt{ab}}_{\text{среднее геометрическое}} \leqslant \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\text{среднее арифметическое}} \leqslant \underbrace{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}_{\text{среднее квадратичное}}$$

Докажите неравенства самостоятельно.

5. Неравенство о трёх квадратах

Для любых a, b, c верно

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca,$$

причём равенство достигается только при $a=b=c$.

Докажите самостоятельно.

6. Домашнее задание

6.63, 6.59, 6.58, 6.54, 6.60, 6.62, 6.64, 6.69.