

**Свойства неравенств****1. Разбор домашнего задания****2. Свойства неравенств**

Все неравенства, встречавшиеся до сих пор, мы доказывали на основании определений знаков строгого или нестрого неравенства. Для того, чтобы уметь доказывать более сложные неравенства, а также для того, чтобы оценивать значения выражений, потребуется знание свойств неравенств. Мы сформулируем и докажем свойства неравенств со знаком  $>$ . Для остальных знаков эти свойства абсолютно аналогичны.

1) Если к обеим частям верного числового неравенства прибавить одно и то же число, то получится верное неравенство:  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a > b \Rightarrow a + c > b + c$ .

Доказательство:  $(a + c) - (b + c) = a + c - b - c = a - b > 0$ , т.к.  $a > b$ .

2) Если обе части верного числового неравенства умножить на положительное число, то получится верное неравенство; если обе части верного неравенства умножить на отрицательное число и поменять знак неравенства на противоположный, то получится верное неравенство:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a > b \Rightarrow \begin{cases} ac > bc, & \text{если } c > 0; \\ ac < bc, & \text{если } c < 0. \end{cases}$$

Доказательство:  $ac - bc = c(a - b)$  — зависит от знака  $c$ , т.к.  $a - b > 0$ .

3) Если обе части верного числового неравенства имеют одинаковый знак, то, заменив их на числа, им обратные, и изменив знак неравенства на противоположный, получим верное неравенство:  $\forall a, b \in \mathbb{R}, ab > 0, a > b \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ .

Доказательство:  $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab} < 0$ , т.к.  $ab > 0, b - a < 0$ .

Эти три доказанных свойства позволяют производить с **верными неравенствами** следующие операции, в результате которых получится неравенство, **равносильное исходному**:

а) прибавлять (вычитать) к обеим частям неравенства одно и то же число или, что то же самое, переносить слагаемые из одной части неравенства в другую, меняя при этом знак слагаемых на противоположный;

б) умножать (делить) обе части неравенства на положительное число;

с) умножать (делить) обе части неравенства на отрицательное число, меняя при этом знак неравенства на противоположный;

д) заменять обе части неравенства, имеющие одинаковые знаки, на числа им обратные, меняя при этом знак неравенства на противоположный.

4) Верные неравенства одного знака можно почленно складывать:  $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + d$ .

Доказательство:  $(a + c) - (b + d) = a + c - b - d = (a - b) + (c - d) > 0$ , т.к.  $a > b, c > d$ .

5) Верные неравенства одного знака с положительными членами можно почленно перемножать:  $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}, a > b > 0, c > d > 0 \Rightarrow ac > bd$ .

Доказательство:  $ac - bd = ac - bc + bc - bd = c(a - b) + b(c - d) > 0$ , т.к.  $a > b, c > d, c > 0, b > 0$ .

Свойства 4) и 5) допускают некоторые обобщения: а) их можно применять не только для двух, но и для  $n$  неравенств; б)  $\forall k \in \mathbb{N}, a > 0, b > 0, a > b \Rightarrow a^k > b^k$ . Это несложно доказать с помощью метода мми (сделайте это самостоятельно!).

**3. Решение задач**

6.30, 6.34, 6.36 устно.

6.29гб

При выполнении этого задания мы вплотную подошли к главной задаче, решаемой применением свойств неравенств: задаче об оценке значения выражения.

Задача1: Пусть  $1 \leq a < 2, 4 < b \leq 6$ . Оцените

а)  $3a - 2$ ; б)  $5 - 2b$ ; в)  $\frac{1}{a^2}$ ; г)  $-\frac{3}{b}$ ; д)  $4a + \frac{1}{4}b$ ; е)  $|0, 5a - 0, 5b|$ ; ж)  $ab$ ; з)  $\frac{b}{a}$ .

Задача2: Периметр параллелограмма больше 20 м, а одна из сторон меньше 6 м. Оцените другую сторону.

**4. Домашнее задание**

Оцените среднюю линию трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ , если  $AC = 5, BD = 7$ .

Оцените периметр трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ , если  $AD = 6, AB = 3, BC = 2$ .

№6.44