

Решение дробно-рациональных уравнений

1. Решение дробно-рациональных уравнений

В математике часто встречаются уравнения, содержащие рациональные выражения. Если в знаменателях дробей у этих выражений переменная отсутствует, то такие уравнения легко приводятся к целым уравнениям, если почленно умножить каждое слагаемое в левой и правой части уравнения на НОК всех знаменателей (такое уравнение у вас встретилось в последней самостоятельной работе). Иначе обстоит дело, если в знаменателе присутствует переменная.

Решите уравнение:

$$\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3}$$

Было бы очень удобно умножить обе части на одно и то же выражение, однако, если это выражение равно нулю, такое действие будет неверным. Но при $x-3=0$ дробные выражения в уравнении не имеют смысла! Поэтому можно поступить таким образом:

$$\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3 \\ x \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3$$

Однако не всегда при решении дробно-рациональных уравнений в правой и левой части возникают дроби с одинаковыми знаменателями. В таких случаях обычно переносят все слагаемые в одну часть и приводят дроби к общему знаменателю:

$$2 - \frac{x-7}{x-5} = \frac{x+5}{x^2-5x} - \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2-3x-10}{x(x-5)} = 0$$

Необходимое и достаточно условие равенства дроби нулю: *дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю*. Поэтому исходное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 10 = 0 \\ x(x-5) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = -2 \\ x = 5 \end{cases} \\ \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$$

Обратите внимание, что первое выражение равно нулю, если $x = -2$ или $x = 5$, а второе выражение не равно нулю, если $x \neq 0$ и $x \neq 5$.

Можно ли было первое уравнение решать таким же образом? Да, так как этот метод — универсальный.

2. Решение задач

5.54а, 5.55в, 5.56в, 5.57в, 5.58а, 5.59б

3. Решение уравнений с параметром

Если в уравнении присутствует параметр, приходится рассматривать несколько случаев.

Решите уравнения:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & \frac{x-a}{2x-1} = 0; \\ \text{б)} \quad & \frac{2x-1}{x-a} = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в)} \quad & \frac{x^2-5x+4}{x-a} = 0; \\ \text{г)} \quad & \frac{x-a}{x^2-5x+4} = 0. \end{aligned}$$

Ответы:

а) при $a = 0,5$ $x \in \emptyset$; при $a \neq 0,5$ $x = a$;

б) при $a = 0,5$ $x \in \emptyset$; при $a \neq 0,5$ $x = 0,5$;

в) при $a = 1$ $x = 4$; при $a = 4$ $x = 1$; при $a \neq 1$ и $a \neq 4$ $x \in \{1; 4\}$;

г) при $a \in \{1; 4\}$ $x \in \emptyset$; при $a \neq 1$ и $a \neq 4$ $x = a$.

Решите уравнения:

$$\text{а)} \quad \frac{x^2 - (2k+1)x + 2k}{x-3} = 0;$$

$$\text{б)} \quad \frac{ax^2 + 100ax + 99a}{x^2 + (a+1)x + a} = 0.$$

Ответы:

а) при $k = 1,5$ $x = 1$; при $k \neq 1,5$ $x \in \{1; 2k\}$;

б) при $a = 0$ $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$; при $a = 99$ $x \in \emptyset$; при $a \neq 0$ и $a \neq 99$ $x = -99$.

5.60г

Решите уравнение:

$$\frac{5x^3 - ax^2 - 5ax + a^2}{5x - a} = 0$$

Ответ: при $a > 0$ и $a \neq 2,5$ $x = \pm\sqrt{a}$; при $a \leq 0$ или $a = 2,5$ $x \in \emptyset$.

4. Домашнее задание

5.56б, 5.58в, 5.59г, 5.60б

Решите уравнения:

$$\text{а)} \quad \frac{ax+1}{x^2-4} = 0;$$

$$\text{б)} \quad \frac{x^2+2x-3}{x+a} = 0;$$

$$\text{в)} \quad \frac{x^2+(a^2-a)x-a^3}{x+4} = 0.$$