Уроки №39-40 09.01.08

Решение уравнений, сводящихся к квадратным
Формула половинного дискриминанта

---

1. Решение некоторых квадратных уравнений. Формула половинного дискриминанта (на доске) Решить уравнение относительно x:

а) $ax^2 + 5a = 5x^2 + 5a$; б) $ax^2 + 2nx + c = 0$; в) $3x^2 + 280x - 867 = 0$.

Уравнение а) — неполное. Ответ: при $a < 0$ $x \in \varnothing$, при $a = 5$ $x \in \mathbb{R}$, при $a \geq 0$, $a \neq 5$ $x = \pm\sqrt{a}$.

Рассмотрим подробнее уравнение б. Заметим, что в этом уравнении количество корней уравнения зависит от выражения $n^2 - ac$, или $\frac{D}{4}$. В случае, если линейный коэффициент является целым чётным числом, проще вычислить, во-первых, значение $\frac{D}{4}$, а во-вторых, значение корней по формуле $\frac{-n \pm \sqrt{\frac{D}{4}}}{a}$. Таким образом, вычисление корней с использованием $\frac{D}{4}$ (мы также будем обозначать это выражение через D_1) может существенно упростить вычисления при решении некоторых квадратных уравнений. Примером этого является уравнение в.

2. Решение задач

5.35б

Дана функция $f(x) = (a^2 - 3a + 2)x + a^2 + 2a - 3$. Что является графиком этой функции? Определите, при каких a график функции

1) совпадает с осью Ox;

2) параллелен оси Ox;

3) проходит через начало координат;

4) пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой 2?

Ответы: 1) $a = 1$; 2) $a = 2$; 3) $a = 1$ или $a = -3$; 4) $\frac{1}{3}$.

5.49, 5.42вг, 5.43вг, 5.44бг, 5.45г

3. Домашнее задание

5.35ав, 5.38, 5.24аг, 5.42аб, 5.43б, 5.44ав, 5.46б, 5.39

Доп. задача: Докажите, что уравнение $x^2 + bx + c = 0$ при целых нечётных b и c не имеет рациональных корней.

Уроки №41-42 12.01.08

Решение уравнений, сводящихся к квадратным
Замена переменных
Теорема Виета

---

1. Разбор домашнего задания

5.46б: заметим, что модули выражений равны тогда и только тогда, когда выражения либо равны, либо противоположны. Значит, уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} 3x^2 - 3x + 5 = 2x^2 + 6x - 3 \\ 3x^2 - 3x + 5 = -2x^2 - 6x + 3 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x^2 - 9x + 8 = 0 \\ 5x^2 + 3x + 2 = 0 \end{array}\right.$$

В первом уравнении корни 1 и 8, во втором дискриминант меньше нуля, поэтому ответ: $x = 1$ или $x = 8$.

5.39: Пусть данные числа $a > 0$ и $b > 0$, тогда

$$\frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}} = 0,6 \qquad \text{или} \qquad \sqrt{ab} = 0,3(a+b)$$

Требуется найти отношение $\frac{a}{b}$. Рассмотрим два способа решения задачи:
I способ: пусть $x = \frac{a}{b}$, тогда

$$a = bx \quad \Rightarrow \quad \sqrt{bx \cdot b} = 0,3(bx+b) \quad \Leftrightarrow \quad b\sqrt{x} = 0,3b(x+1) \quad \Leftrightarrow \quad 9x^2 - 82x + 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 9 \text{ или } x = \frac{1}{9}$$

II способ: разделим обе части уравнения на b, тогда

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = 0,3(\frac{a}{b} + 1)$$

Заметим, что если воспринимать $\sqrt{\frac{a}{b}}$ как отдельную переменную, то уравнение является квадратным относительно этой переменной. Обозначим за $\sqrt{\frac{a}{b}}$ за t, при этом $t > 0$. Решим уравнение

$$t = 0,3(t^2 + 1),$$

получим $t = 3$ или $t = \frac{1}{3}$. Значит, отношение заданных положительных чисел равно девяти или одной девятой.

При решении уравнения мы применили *замену переменной*, чтобы получилось новое уравнение, более простое.

2. Решение задач

5.61в, 5.63в, 5.64в, 5.66в, 5.67в, 5.68в.

3. Самостоятельная работа 20 минут

1) Решите уравнение:

а) $x^4 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{6}x^2;$

б) $y^2 - 3\left(\sqrt{y}\right)^2 - 10 = 0;$

в) $y^2 - 3\sqrt{y^2} - 10 = 0;$

г) $9(x-2)^2 - 18\sqrt{3}|x-2| + 27 = 0.$

2) Найдите все значения a, для которых график функции $f(x) = (a+2)x^2 + 5a^2x + 1$ проходит через точку $M(-2; 3)$.

3) Докажите, что оба корня уравнения $x^2 + 4x - 14 = 0$ больше, чем число $-6,5$.

4. Теорема Виета

Пусть квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни. Тогда, как известно, корни можно найти по формуле

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Обозначим меньший корень за x_1, а больший за x_2. Тогда

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{D} - b + \sqrt{D}}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 x_2 = \frac{b^2 - D}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Значит, если корни квадратного уравнения существуют, то их сумма равна отношению линейного коэффициента к старшему, взятому с обратным знаком, а произведение равно отношению свободного члена к старшему коэффициенту. Это утверждение носит название *теоремы Виета*.

Что, если мы подобрали такие числа y_1 и y_2, что $y_1+y_2=-\frac{b}{a}$, а $y_1y_2=\frac{c}{a}$. Обязательно ли тогда y_1 и y_2 являются корнями уравнения? Оказывается, обратная теорема также верна: если сумма двух числе равна отношению линейного коэффициента к старшему, взятому с обратным знаком, а произведение равно отношению свободного члена к старшему коэффициенту квадратного уравнения, то такие числа являются корнями этого уравнения. Действительно,

$$ay_1^2+by_1+c=ay_1^2-a\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)+a\cdot\frac{c}{a}=ay_1^2-a(y_1+y_2)y_1+ay_1y_2=ay_1^2-ay_1^2-ay_1y_2+ay_1y_2=0,$$

то есть y_1 является корнем уравнения $ax^2+bx+c=0$. Аналогично утверждение доказывается для y_2.

5. Решение задач

5.75-5.77 устно.

6. Домашнее задание

5.47б, 5.63а, 5.65г, 5.66г, 5.67г, 5.68а, 5.38, 5.50, 5.29г, 5.53, 5.78а, 5.82а, 5.83а.

Уроки №43-44 19.01.08

Применение теоремы Виета к решению задач

---

1. Разбор домашнего задания

5.83а ($x^2-6=0$)

2. Решение задач

5.81б (составить с целыми коэффициентами), 5.83бг

3. Частные случаи решения квадратных уравнений

Теорема 1. *Корнем квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, где $a\neq 0$, является 1) число 1 т. и т. т., когда $a+b+c=0$; 2) число -1 т. и т. т., когда $a-b+c=0$.*

$\lozenge$ *1) Если $x=1$, то, подставив его в уравнение, получим: $a+b+c=0$. Если $a+b+c=0$, то $b=-(a+c)$, тогда $D=b^2-4ac=(a+c)^2-4ac=(a-c)^2$; $x=\frac{(a+c)\pm(a-c)}{2a}$, откуда $x=1$ или $x=\frac{c}{a}$.* $\blacklozenge$

4. Решение задач

Устно:

$$98x^2-53x-45=0; \qquad 37x^2+38x+1=0;$$
$$11x^2+101x-112=0; \qquad -17x^2+14x+31=0.$$

5.79бг (можно использовать только сумму корней!).

Рассмотрим фундаментальную задачу, связанную с теоремой Виета. Дано уравнение: $4x^2-3x-2=0$. Имеет ли оно корни? Обозначим их x_1 и x_2. Не вычисляя корней уравнения, найдите:

$$x_1+x_2; \qquad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}; \qquad \frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2};$$
$$x_1x_2; \qquad x_1x_2^2+x_1^2x_2; \qquad x_1^3+x_2^3.$$

Составьте другие квадратные уравнения, имеющие корни: x_1^2 и x_2^2; $\frac{x_2}{x_1^2}$ и $\frac{x_1}{x_2^2}$.

5.91, 5.98, 5.113

5. Домашнее задание

5.76; 5.79ав; 5.80в; 5.81в; 5.83в; 5.85; 5.88; 5.90

*Найдите все простые p и q такие, что уравнение $x^2-px+q=0$ имеет хотя бы один простой корень.