Иррациональные числа

1. Разбор домашнего задания

2. Рациональные числа Определение рационального числа. Натуральные числа, целые числа, рациональные числа (обозн. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$). Операции на множествах $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. Числа как точки на прямой.

Теорема 1. *Между любыми двумя рациональными числами всегда найдётся еще хотя бы одно рациональное число.* Говорят, что множество рациональных чисел *всюду плотно* на прямой.

$\lozenge$ Пусть r_1 и $r_2 \in \mathbb{Q}$. Тогда $\frac{r_1+r_2}{2}$ — тоже рациональное число, и находится между ними. $\blacklozenge$

Грубо говоря, если мы ткнём пальцем в прямую, то независимо от толщины нашего пальца под ним всегда будет бесконечное количество рациональных точек. Несмотря на это, на прямой есть также точки, которым не соответствуют рациональные числа. Например, мы знаем, что существует $\sqrt{2}$. А является ли это рациональным числом?

3. Действительные числа. Иррациональные числа

Задача Докажите, что $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Следовательно, на прямой, кроме рациональных, есть и другие точки. Все числа на прямой образуют множество ***действительных*** чисел (обозн. $\mathbb{R}$). Действительные числа, которые не являются рациональными, называются ***иррациональными***. Отдельного обозначения для множества иррациональных чисел не существует. Его можно обозначить как $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Теорема 2. *Если $n \in \mathbb{N}$, то либо $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$, либо $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.*

$\lozenge$ Если $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$, то утверждение теоремы выполнено. Рассмотрим случай, когда $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$.

Тогда $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$, где $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}$. Тогда

$$a^2 = nb^2.$$

В разложение a^2 на простые множители каждый простой множитель входит в чётной степени. Аналогично в разложении b^2. Соответственно, чтобы равенство выполнялось, в разложение n каждый простой множитель тоже должен входить в чётной степени. Значит, n является квадратом некоторого натурального числа. А значит, $\sqrt{n} \in \mathbb{N}$. $\blacklozenge$

Из этой теоремы следует, что иррациональных чисел бесконечно много. На самом деле, их не просто бесконечно много, а в некотором смысле «ольше» чем рациональных. А именно, если мы бросим на прямую специальную иголку толщиной в одну точку, то с вероятностью 1 она воткнётся в иррациональное число! Т. е., несмотря на то, что рациональных чисел бесконечно много и они покрывают всю прямую так, что мы долгое время не подозревали о существовании на этой прямой еще чего-нибудь, этого «щё чего-нибудь»ам не просто много, а очень много. Этот факт и другие мы докажем несколько позже.

Десятичная запись числа (вспомним теорему о представлении любого рационального числа десятичной конечной или периодической дробью). Отметим на прямой все целые точки. Пусть у нас есть некоторая десятичная дробь, например, $3,141592$. Возьмём две соседние целые точки, так что меньшая из них является целой частью дроби. Разобьём промежуток между ними на десять равных частей. Выберем такой промежуток, чтобы первая цифра после запятой соответствовала его левому краю. Снова поделим этот промежуток на десять частей. И так далее. Каждый раз промежуток, в который попадает наше число, будет уменьшаться в десять раз. Если дробь конечна, то мы когда-нибудь попадём в конец отрезка. Если же нет, то мы будем до бесконечности сжимать промежуток вокруг некоторой точки. Каждой десятичной записи соответствует ровно одна точка, кроме записей вида $3,14000\ldots$ и $3,1499999\ldots$. В первом случае очевидно, что это то же самое, что и число $3,14$. При этом, действуя по такому алгоритму, мы каждый раз будем выбирать левый отрезок, т. е. стремиться к числу $3,14$. Во втором случае мы каждый раз будем выбирать правый отрезок, т. е. стремиться к числу $3,15$. Здесь не так очевидно, что это то же самое число. Можно это проверить, допустим, переведя числа в обыкновенную дробь.

4. Свойства действительных чисел

4.38бгезкм, 4.39без

5. Самостоятельная работа №4 15 минут.

I вариант	II вариант
1) Докажите, что сумма рациональных чисел рациональна.	1) Докажите, что разность рациональных чисел рациональна.
2) 4.31г	2) 4.31д
3) 4.41	3) 4.40
4) 4.42	4) 4.44
5) 4.39ж	5) 4.39ж

6. Домашнее задание 1) Знать определения, свойства с доказательствами действительных чисел, 4.36, 4.38авджил,

2) доказать, что $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ при $a \geq 0$, $b \geq 0$; $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ при $a \geq 0$, $b > 0$; $\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n$ при $a \geq 0$.