

Целые выражения

Алгебраические выражения, составленные с помощью действий сложения, вычитания, умножения и деления на число, отличное от нуля, называют **целыми выражениями**.

Всякое ли целое выражение есть многочлен? Всякий ли многочлен есть целое выражение? Всякое ли целое выражение равно некоторому многочлену?

Формулы сокращенного умножения и раскрытие скобок

1. Представьте в виде многочлена:

- а) $(x - 3y)^2 + (x - 3y)^2$; г) $(a + 4b)(7a + b + 6) - (7a + b)(a + 4b + 6)$;
 б) $(2a - 1)^3$; д) $(a + 2)^3 - 3(a + 2)^2 + 3(a + 2) - 1$.
 в) $(5x + 2y)(25x^2 - 10xy + 4y^2)$;

2. Докажите, что при всех значениях x выражение $4(8x - 5)^2 - 4(8x - 5) + 2$ принимает положительные значения.

3. Найдите значение выражения $x^6 + 3x^2y^2 + y^6$, если $x^2 + y^2 = 1$.

4. Представьте в виде многочлена. Подсчитывая по очереди его коэффициенты в уме, пишите сразу ответ.

- а) $(x + 1)(x + 2)$; в) $(x^3 + 2x^2 + 2x - 1)(x^2 + x - 2)$;
 б) $(x^2 + x - 1)(x^2 - 3)$; г) $(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$.

5. Раскройте скобки в выражении $(a + b + c)^2$. Запомните полученную формулу. Как она изменится, если увеличивать число слагаемых? Как правильно расставить знаки в получившемся многочлене, если перед некоторыми слагаемыми будет знак "−"?

6. Упростите выражение $(a + b + c)^2 + (a + b - c)^2 + (a - b + c)^2 + (b + c - a)^2$. Постарайтесь сделать это устно, запишите только ответ!

7. Докажите, что сумма произведения четырех последовательных натуральных чисел и единицы есть полный квадрат.

Разложение на множители и решение уравнений

8. Разложите на множители:

- а) $x^2 - 5x + 6$; в) $x^3 - 7x - 6$; д) $x^8 + x^4 + 1$;
 б) $x^2 - x - 2$; г) $x^4 - 3x^2 + 1$; е) $x^5 + x^4 + 1$.

9. Решите уравнение: а) $x^2 - x - 12 = 0$; б) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

10. Составьте уравнения указанной степени, имеющее следующие корни:

- а) квадратное с корнями 5 и 2; г) кубическое с корнями 1, −2 и 3;
 б) квадратное с корнями −1 и 3; д) кубическое с корнями −1, 0 и 1;
 в) квадратное с корнями 0 и 1; е) пятой степени с корнями −1, 0 и 1.

11. Пусть правая часть уравнения равна нулю, а в левой записан многочлен. Докажите, что если его можно разложить на множители, один из которых равен $x - a$, то a — корень уравнения. Он называется также **корнем соответствующего многочлена**.

(*) Подумайте, верно ли обратное утверждение.

Деление многочленов с остатком

12. Выполните деление многочленов уголком. Ответ запишите в виде, аналогичном формуле деления с остатком для натуральных чисел.

- а) $3x^6 + 2x^4 - 2x^3 + x - 6$ на $x^4 + 2x + 2$; в) $x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 10x + 6$ на $x - 3$;
 б) $x^5 - 6x^3 + 2x^2 - 4$ на $x^2 - x + 1$; г) $x^7 - 1$ на $x^3 + x + 1$.

Теорема. Если многочлен делится без остатка на $x - a$, то a — его корень.

13. Делится ли многочлен $x^5 + 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 5x - 5$ без остатка на: а) $x - 1$; б) $x^2 - 3x + 2$

14. При каком значении k выполняется без остатка деление $x^3 + 6x^2 + kx + 12$ на $x + 4$?

15. При каких значениях a и b многочлен $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + ax + b$ делится на многочлен $x^2 - 3x + 2$ а) без остатка; б) с остатком 3?

16. Разделите уголком: а) $x^n - 1$ на $x - 1$; б) $x^{2n+1} + 1$ на $x + 1$. Запомните полученные формулы.

17. Разложите на множители: а) $x^3 + x^2 + x - 3$; б) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x - 5$;

в) $x^{100} + x^{99} + x^{98} + \dots + x^2 + x - 100$.

18. Докажите, что многочлен $x^{29} + x^{28} + \dots + x + 1$ делится на многочлен $x^9 + x^8 + \dots + x + 1$.

Дополнительные задачи

19. Докажите тождество $(x^2 - 1 + x)(x^2 - 1 + 3x) + x^2 = (x^2 + 2x - 1)^2$.

20. Найдите значение произведения: $101 \cdot 10001 \cdot 100000001 \cdot \dots \cdot \underbrace{100 \dots 001}_{2^n - 1 \text{ нуль}}$.

21. Делится ли число $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 1543^3$ на 1544?

Задачи для домашних заданий

22. Найдите значение выражения $x^4 + x^2y^2 + y^4$, если $x^2 + y^2 = a$, $xy = b$.

23. Решите уравнение $x^2 - 3x - 10$.

24. Докажите, что число $a - b$ при любых значениях a и b является корнем уравнения $x^3 + 3abx + b^3 - a^3 = 0$.

25. Разложите на множители: а) $(x^2 + 4x + 8)^2 - 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2$; б) $(a + 1)^4 + (a + 1)^3 + a(a + 2)$.

26. Разложите на множители $x^4 + 4$.

27. При каких значениях a число $a - 1$ является корнем уравнения $x^3 - ax^2 + 1 = 0$?

28. Найдите такие a и b , чтобы многочлен $x^4 - 3x^3 + 6x^2 + ax + b$ делился на $x^2 - 1$.

29. Упростите выражение $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 2^{13}$.